

# AZ EGÉSZ FÖLD OPTIMÁLIS ÁBRÁZOLÁSA ÁLTALÁNOS TORZULÁSÚ PÓLUSVONALAS KÉPZETES HENGERVETÜLETBEN

GYÖRFFY JÁNOS

## Összefoglalás

Az átlagos torzultságok szerinti legjobb vetületeket határoztuk meg a pólusvonalas képzetes hengervetületek alábbi csoportjaira, melyeket a vetületi egyenletek alapján alakítottunk ki:

- $x=c \times \text{arc } \mathbf{I}$  (valódi hengervetület);
- $x=c(\mathbf{j}) \times \text{arc } \mathbf{I}$ , ahol  $c(\mathbf{j})$  páros függvény (a szélességi körök ekvidisztánsak);
- $x=c(\mathbf{j}) \times \mathbf{I}$ , ahol  $c(\mathbf{j})$  páros,  $f(\mathbf{I})$  páratlan függvény (a meridiánok minden szélességi kört ugyanolyan arányban osztanak fel);
- $x=x(\mathbf{j}, \mathbf{I})$   $\mathbf{j}$ -ben páros,  $\mathbf{I}$ -ban páratlan függvény (a meridiánok a szélességi köröket tetszőlegesen változó arányban osztják fel).

Minden egyes csoporton belül alcsoportokat képeztünk az  $y=y(\mathbf{j})$  vetületi egyenlet alapján:

- $y=\text{arc } \mathbf{j}$  (vagyis a középméridián hossztartó);
- $y=d \times \text{arc } \mathbf{j}$  (vagyis a középméridián ekvidisztáns);
- $y=y(\mathbf{j})$   $\mathbf{j}$ -ben páratlan függvény.

A vetületi egyenletek alkotó függvényeit polinomokkal közelítettük, és a többváltozós szimplex módszer nevű minimalizáló eljárással határoztuk meg azokat az együttható értékeket, amelyek a vizsgált átlagos teljes torzultsági hiba-kritériumokra (eredeti Airy, Airy—Kavrajzkij stb.) a minimális értékeket adták.

A vizsgálatok eredményei:

- A különböző torzultsági kritériumok eltérő vetületeket eredményeztek; a földrajzi szemlélettel, az esztétikai érzékkel és a térképészeti hagyományokkal az Airy–Kavrajzkij és a módosított Airy kritériumból származó vetületek állnak összhangban.
- Az  $x$  vetületi egyenlet szerinti csoportok sorrendjében a hiba általában jelentősen csökken, különösen a valódi és az ekvidisztáns képzetes hengervetületek között, valamint az utolsó (a változó arányban felosztott parallelkörű) csoportnál. Az  $y$  vetületi egyenleteket közelítő polinomok fokszámának növelésével a hiba többnyire csak kis mértékben csökkenthető tovább.
- Mind az ekvidisztáns parallelkörű, mind a változóan felosztott parallelkörű legjobb képzetes hengervetületek az átlagos torzultság szempontjából lényegesen kedvezőbbek, mint a hagyományos képzetes hengervetületek, ezért a teljes Föld ábrázolására hangsúlyozottan javasolhatók.

## REPRESENTING THE WHOLE EARTH IN BEST PSEUDOCYLINDRICAL PROJECTIONS WITH POLE LINE

### Abstract

*The minimum mean overall error projections were prepared in some groups of pseudocylindrical projections with pole lines. These groups were formed on the grounds of the mapping equation  $x=x(\mathbf{j}, \mathbf{I})$ :*

- $x=c\text{arc}\mathbf{I}$  (cylindrical projection);
- $x=c(\mathbf{j})\text{arc}\mathbf{I}$ , where  $c(\mathbf{j})$  is even function (i.e. the parallels are equidistant);
- $x=c(\mathbf{j})f(\mathbf{I})$ , where  $c(\mathbf{j})$  is even function,  $f(\mathbf{I})$  is odd function (i.e. the meridians divide all parallels into the same proportions);
- $x=x(\mathbf{j},\mathbf{I})$  even function of  $\mathbf{j}$  and odd function of  $\mathbf{I}$  (i.e. the meridians space parallels into arbitrary proportions).

In all groups subgroups were formed on the grounds of the mapping equation  $y=y(\mathbf{j})$ :

- $y=\text{arc}\mathbf{j}$  (i.e. scale is true along the central meridian);
- $y=d\text{arc}\mathbf{j}$  (i.e. the central meridian is equidistant);
- $y=y(\mathbf{j})$  is odd function.

The constituent functions of the mapping equations were approximated by polynomials, and their coefficients giving minimal values of the studied mean overall error criteria (original Airy, Airy–Kavrayskiy, etc.) were computed by the multidimensional downhill simplex method.

The results of the examination:

- The different error criteria effected diverse projections; the projections derived from the criteria of Airy–Kavrayskiy and modified one of Airy correspond most of all to the geographical approach, aesthetic sense and cartographical traditions.
- The error in general significantly decreases in order of the above groups according to the mapping equation  $x=x(\mathbf{j},\mathbf{I})$ , especially between the groups of cylindrical projections and pseudocylindrical ones with equidistant parallels, and by the last group (with into arbitrary proportions spaced parallels). Conversely, the error can be only decreased slightly by stepping up the grade of the polynomials approximating mapping equation  $y=y(\mathbf{j})$ .

Both the best pseudocylindrical projections with equidistant parallels and with arbitrarily spaced parallels are substantially more favourable from the point of view of the mean error than the traditional pseudocylindrical projections, and therefore they can be definitely recommended for representing the whole Earth.

---

**A világtérképek vetülete** – a XX. század elejére kialakult hagyományoknak megfelelően, amelyek a torzulások mérlegelésén, az övezetes földrajzi jelenségek kihangsúlyozásán, szemléletességi és esztétikai követelményeken alapultak – **többnyire képzetes hengervetület**. A térképészet története folyamán igen sok képzetes hengervetület keletkezett, az ezek közötti minősítés és válogatás a fenti szempontok alapján történik, különös tekintettel a **torzulási viszonyokra**.

A szélességi köröket párhuzamos egyenesként megjelenítő képzetes hengervetületek között az ábrázolt témától függően mind területtartó, mind általános torzulású változatok előfordulnak, de a korábban domináns területtartó vetületekkel szemben napjainkban – a kontinensek alakjának kisebb torzulása miatt – az általános torzulású vetületek kerülnek előtérbe. A pólust, ahol a torzulások egy része végtelen nagyra válik, a képzetes hengervetület vagy egy pontra, vagy egy egyenes szakaszra (az úgynevezett pólusvonalra) képezi le. A **póluspontos** változat általában szemléletesebb és esztétikusabb; a **pólusvonalas** változat megértése absztrakciós képességet kíván, viszont a pólusvonal környékén a torzulások csökkenthetők.

Egy – az egész Földet mind az  $x$ , mind pedig az  $y$  tengelyre nézve szimmetrikusan ábrázoló – térkép vetületét akkor tekintjük egy bizonyos torzulás szempontjából legjobbnak, ha az adott torzulás, pontosabban torzultságot jellemző mérőszámunk a  $-85^\circ$  és  $85^\circ$  szélességi körök közé eső területen (azaz a pólusok környékétől eltekintve az egész Földön) számított átlaga a lehető legkisebb. Esetünkben – vagyis az általános torzulású vetületek körében – az ún. **teljes torzultság**  $e^2$  lokális mérőszámainak átlagát kell minimálissá tenni. Ezek a torzultsági mérőszámok (ld. [4]) az adott pontban fellépő maximális  $a$  és minimális  $b$  hossztorzulás függvényei:

$$e^2_{AJ} = 0.5 \cdot [(a-1)^2 + (b-1)^2] \quad (\text{Airy, James és Clarke mérőszáma [1] és [6] alapján});$$

$$e^2_{Ae} = \left(\frac{a}{b} - 1\right)^2 + (a \cdot b - 1)^2 \quad (\text{Airy eredeti mérőszáma a [1] alapján});$$

$$e^2_{Am} = \left(\frac{a}{b} - 1\right)^2 + \left(\max\left\{a \cdot b, \frac{1}{a \cdot b}\right\} - 1\right)^2 \quad (\text{Airy módosított mérőszáma [5] alapján});$$

$$e^2_{AK} = 0.5 \cdot [(\ln(a))^2 + (\ln(b))^2] \quad (\text{Airy–Kavrajcszkij féle mérőszám [7] alapján}).$$

(A szakirodalomban előfordul, hogy  $e^2_{Ae}$  és  $e^2_{Am}$  fenti kifejezésében is szerepel a 0.5-ös szorzó, másrészt a másik két mérőszámban a 0.5-ös szorzót néha elhagyják.)

Az  $a$  és  $b$  extrémális hossztorzulásokat a fokhálózatmenti torzulásokból: a  $h$  parallelkörmenti és  $k$  meridiánmenti hossztorzulásból, valamint a fokhálózati vonalak által bezárt  $q$  szögből számítjuk az

$$a = \frac{\sqrt{h^2+k^2+2hk \cdot \sin q} + \sqrt{h^2+k^2-2hk \cdot \sin q}}{2} \quad \text{és} \quad b = \frac{\sqrt{h^2+k^2+2hk \cdot \sin q} - \sqrt{h^2+k^2-2hk \cdot \sin q}}{2} \quad \text{képletekkel.}$$

Legyenek  $y=y(\mathbf{j})$  és  $x=x(\mathbf{j}, \mathbf{l})$  a képzetes hengervetület egyenletei; ezekből a fokhálózatmenti torzulások a

$$h = \frac{\partial x}{\partial \mathbf{l}} \cdot \frac{1}{\cos \mathbf{j}}, \quad \text{ctg } q = \frac{\frac{\partial x}{\partial \mathbf{j}}}{\frac{\partial y}{\partial \mathbf{j}}} \quad \text{és} \quad k = \sqrt{\left(\frac{dx}{d\mathbf{j}}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\mathbf{j}}\right)^2} = \frac{dy}{d\mathbf{j}} \cdot \frac{1}{\sin q}$$

képletekből számíthatók minden  $(\mathbf{j}, \mathbf{l})$  koordinátájú pontban (ld. [12]). (A továbbiakban tetszőleges fokban megadott  $\mathbf{x}$  szög radiánban megadott értékét  $\text{arc}\mathbf{x}$ -vel jelöljük.)

Az egész Földre az átlagos teljes torzultság (globális)  $E^2$  mérőszámát az

$$E^2 = \frac{1}{m(T)} \int_T e^2 dT$$

felületi integrálból vont négyzetgyök adja, ahol  $T$  a  $-85^\circ$  és  $85^\circ$  szélességi körök közé eső gömböv (ld. [4]),  $m(T)$  pedig e gömböv felszíne az egység sugarúnak tekintett gömbön. Minthogy  $e^2$   $a$ -n és  $b$ -n keresztül  $\mathbf{j}$ -től és  $\mathbf{l}$ -től függ,  $E$  az alábbi alakban írható fel:

$$E = \sqrt{\frac{1}{4 \cdot p \cdot \sin 85^\circ} \int_{-85^\circ}^{85^\circ} \int_{-180^\circ}^{180^\circ} e^2 \cdot \cos \mathbf{j} d\mathbf{l} d\mathbf{j}}$$

A fenti  $e^2$  mérőszámok alapján így kapjuk az  $E_{AJ}$  (Airy–James–Clarke féle), az  $E_{Ae}$  (Airy eredeti), az  $E_{Am}$  (Airy módosított) és az  $E_{AK}$  (Airy–Kavrajcszkij féle) torzultsági

kritériumokat. Általános torzulású vetületeket tehát a teljes torzultság szempontjából úgy hasonlíthatunk össze, hogy valamelyik kritérium értékét minden összehasonlítandó vetületre kiszámítjuk, és a kisebb kritérium-értékű vetületet tekintjük jobbnak. **Legjobb** („optimálisnak”) azt a vetületet nevezzük, amelynek kritérium-értéke a vizsgált vetület-halmazon belül a legkisebb (ld. [10], [4]).

A pólusvonalas képzetes hengervetületeknek a meridiánvonalak jellegétől független, matematikai szempontú osztályozását a vetületi egyenletek alapján végezzük, és pedig a valódi hengervetületekből kiindulva. Az osztályozás elsődleges szempontja az  $x=x(\mathbf{j}, \mathbf{I})$  vetületi egyenlet, mivel döntően ez adja meg a vetület jellegét megszabó kontúrvonalat. (Az  $y=y(\mathbf{j})$  a kontúrt csak kis mértékben befolyásolja.)

A **valódi hengervetületeknél** az  $x$  vetületi egyenlet csak  $\mathbf{I}$ -tól függ, ezért a paralelkörök képei mind egyenlő hosszúságúak: hosszuk  $x=arc\mathbf{I}$  esetén a hossztartó egyenlítő hosszával,  $x=c \cdot arc\mathbf{I}$  ( $c<1$ ) esetén pedig két hossztartó paralelkör hosszával egyenlő. A **képzetes hengervetületeknél** az  $x$  vetületi egyenlet  $\mathbf{I}$ -n kívül  $\mathbf{j}$ -től is függ:

- A legegyszerűbb típusú képzetes hengervetület  $x$  vetületi egyenlete  $x=c(\mathbf{j}) \cdot arc\mathbf{I}$  alakú, ahol  $c(\mathbf{j})$  páros függvény. A paralelkörök ebben az esetben ekvidisztánsak. Ez a legelterjedtebb vetülettípus, ide sorolhatók pl. Eckert, Mollweide, Kavrajszkij vetületei, valamint Baranyi II. vetülete (ld. [12], [2]).
- Ennél bonyolultabb típus az, ahol  $x=c(\mathbf{j}) \cdot f(\mathbf{I})$  alakú, vagyis felírható egy páros  $c(\mathbf{j})$  függvény és egy páratlan  $f(\mathbf{I})$  függvény szorzataként. Ezeknél a meridiánok minden paralelkört ugyanolyan arányban bontanak fel részekre. A gyakorlatban használt vetületek közül Baranyi IV. vetülete tartozik ide.
- A legáltalánosabb esetben az  $x=x(\mathbf{j}, \mathbf{I})$  tetszőleges  $\mathbf{j}$ -ben páros,  $\mathbf{I}$ -ban páratlan függvény. Itt a paralelköröket a meridiánok tetszőlegesen változó arányban osztják fel.

A  $y=y(\mathbf{j})$  vetületi egyenlet jellege képezi a képzetes hengervetületek másodlagos osztályozási szempontját:

- A legegyszerűbb alakban  $y=arc\mathbf{j}$  (vagyis a középmeridián hossztartó).
- A következő lépésben bevezetve a  $d$  paramétert, kapjuk a lineáris  $y=d \cdot arc\mathbf{j}$  alakot. (Itt a középmeridián mentén a hossztorzulás értéke  $d$ , tehát a középmeridián ekvidisztáns.)
- $y=y(\mathbf{j})$   $\mathbf{j}$ -ben páratlan, nemlineáris függvény.

A legjobb képzetes hengervetületeket az  $x=x(\mathbf{j}, \mathbf{I})$  vetületi egyenlet fenti csoportjaihoz határoztuk meg, és minden csoporton belül vizsgáltuk az  $y=y(\mathbf{j})$  függvény szerint képzett alcsoportokhoz tartozó vetületeket. Az  $x=x(\mathbf{j}, \mathbf{I})$  alkotó függvényeit, valamint az  $y=y(\mathbf{j})$  függvényt  $\mathbf{j}$ , illetve  $\mathbf{I}$  **polinomjaival** közelítettük, és pedig  $y$ -t  $\mathbf{j}$ -ben páratlan kitevős,  $x$  alkotó függvényeit pedig  $\mathbf{j}$ -ben páros,  $\mathbf{I}$ -ban páratlan kitevős hatványokat tartalmazó polinomokkal. A tapasztalat szerint az egész Földet ábrázoló legjobb képzetes hengervetületeknél 3 együtthatós polinom minden függvényhez elegendő pontosságú közelítést eredményezett, sőt a harmadik tag figyelembevételére sem mindig volt szükség.

A számításokhoz a gömbfelület  $-85^\circ$  és  $85^\circ$  szélesség közötti részét  $1^\circ$ -os fokhálózattal bontottuk fel, majd a fokhálózati metszéspontokban kiszámoltuk a  $h$  paralelkör menti és a  $k$  meridián menti hossztorzulásokat, valamint a  $q$  térképi fokhálózati szög kotangensét, ezekből pedig az  $a$  és  $b$  extrémális hossztorzulásokat a fentiekben megadott képletek segítségével. Végül a lokális teljes torzultság  $e^2 = e^2(a,b)$  mérőszámainak a fokhálózati metszéspontokra kiszámított értékei a kétváltozós Simpson-formulával (ld. [8]) összegezve és az alapfelületi felszínnel osztva kapjuk az átlagos torzultság  $E_{AJ}$ ,  $E_{Ae}$ ,  $E_{Am}$  és  $E_{AK}$  kritériumok értékeit.

Látható, hogy a  $E$  mennyiségek az integrált  $e^2 = e^2(a,b)$  mennyiségeken keresztül függenek a vetületi egyenletekben szereplő együtthatóktól. A minimális  $E$  értékeket szolgáló együttható-értékeket a variációs számítás direkt módszerével, a „szimplex módszer” nevű közelítő minimalizáló eljárás segítségével határoztuk meg (ld. [9], [11]).

A valódi, majd a képzetes hengervetületek  $x=x(\mathbf{j}, \mathbf{I})$  szerint definiált osztályaiban és  $y=y(\mathbf{j})$  szerinti alosztályaiban az itt következő eredményeket kaptuk.

### I. Legjobb valódi hengervetületek hossztartó egyenlítővel

$x=arc\mathbf{I}$  esetén  $h = \frac{1}{\cos j}$ , a fokhálózat merőlegessége miatt  $ctg\mathbf{q}=0$ . A variációs számítás egyszerű alkalmazásával kimutatható (ld. [5]), hogy mind a négy vizsgált kritérium szerinti legjobb valódi hengervetület meridiánban hossztartó. Az  $y$  vetületi egyenlet tehát ebben az esetben mindig  $y=arc\mathbf{j}$  alakú, vagyis  $k=1$ .

A kritériumok értékei:

1. táblázat

$E_{AJ}=0,76317$
$E_{Ae}=1,52635$
$E_{Am}=1,52635$
$E_{AK}=0,34552$

( $h \geq k$ , emiatt itt  $E_{Ae}=E_{Am}$ )

### II. Legjobb valódi hengervetületek két hossztartó paralelkörrel

$x=c\mathbf{arc}\mathbf{I}$  ( $c < 1$ ) esetén két hossztartó paralelkör van ( $\pm \mathbf{j}_n$ );  $h = \frac{\cos j_n}{\cos j}$  és  $ctg\mathbf{q}=0$ . Ekkor az  $E_{AJ}$ ,  $E_{Am}$  és  $E_{AK}$  kritériumok szerinti legjobb hengervetület továbbra is meridiánban hossztartó (vagyis  $y=arc\mathbf{j}$  és  $k=1$ ), azonban a hossztartó paralelkörök optimális helyzete kritériumonként különbözik. Más a helyzet az  $E_{Ae}$  szerinti legjobb hengervetülettel. Ha itt is a meridiánban hossztartó ( $k=1$ ) változattal számolunk, akkor az eredmények az alábbi táblázatban foglalhatók össze:

2. táblázat

	Optimális	
	c	$\mathbf{j}_n$
$E_{AJ}=\mathbf{0,38370}$	0,47377	$\pm 61,72^\circ$
$E_{Ae}=\mathbf{0,89928}$	0,59260	$\pm 53,66^\circ$
$E_{Am}=\mathbf{0,95459}$	0,63234	$\pm 50,78^\circ$
$E_{AK}=\mathbf{0,27448}$	0,74320	$\pm 42,00^\circ$

Az  $E_{Ae}$  értéke azonban csökkenthető, ha az y-t háromparaméteres, ötödfokú polinomnak tekintjük ( $y=y_1 \cdot \arccos \mathbf{j} + y_2 \cdot \arccos^3 \mathbf{j} + y_3 \cdot \arccos^5 \mathbf{j}$ ). Direkt módszerrel ekkor a következő eredményt kapjuk:

$$E_{Ae}=0,78361, \quad c=0,46021 \quad (\mathbf{j}_n=62,60^\circ);$$

$$y_1=0,51700, \quad y_2=0,17995, \quad y_3=-0,02942.$$

A variációs számításból ismert Euler-Lagrange féle differenciálegyenlettel (ld. [9]) kimutatható, hogy az  $E_{Ae}$  kritérium szerinti legjobb, két paralelkörben hossztartó valódi hengervetület a normálpáralelkörökön kívül meridiánban hossztartó, azok között viszont az y vetületi egyenletet az

$$y = \int_0^{|j|} \frac{\cos^3 \mathbf{j} \cdot \cos \mathbf{j}_n + \cos^3 \mathbf{j}_n \cdot \cos \mathbf{j}}{\cos^4 \mathbf{j} + \cos^4 \mathbf{j}_n} d\mathbf{j} \cdot \text{sign}(\mathbf{j}) =$$

$$= \sum \left\{ q_{i1} \cdot \left[ \text{Ln} \left( \text{tg}^2 \frac{|j|}{2} + q_{i2} \cdot \text{tg} \frac{|j|}{2} + q_{i3} \right) - q_{i4} \right] + q_{i5} \cdot \left[ \text{arc tg} \left( \frac{\text{tg} \frac{|j|}{2} + q_{i6}}{q_{i7}} \right) - q_{i8} \right] \right\} \cdot \text{sign}(\mathbf{j})$$

képlet adja meg, ahol  $\text{sign}(\mathbf{j})$  a földrajzi szélesség előjelét jelenti (melyet az É-i félgömbön tekintünk pozitívnak). Ha az egész Földet akarjuk ábrázolni, akkor a  $q_{ij}$  ( $i, j=1, \dots, 8$ ) értékeket a 3. táblázat szerint kell megadni, és normálpáralelkörnek a  $\pm 62,8^\circ$  szélesség választandó. Ekkor  $E_{Ae}=0,78267$ , és a valódi hengervetületek körében ez a kritérium-érték tovább már nem csökkenthető (ld. [5]).

3. táblázat

$q_{ij}$	j=1	j=2	j=3	j=4	j=5	j=6	j=7	j=8
i=1	0,11246	1,39784	0,55061	-0,59672	-0,02325	0,69892	0,24925	1,22823
i=2	-0,11246	-1,39784	0,55061	-0,59672	-0,02325	-0,69892	0,24925	-1,22823
i=3	0,11246	2,53869	1,81615	0,59672	0,02325	1,26935	0,45268	1,22823
i=4	-0,11246	-2,53869	1,81615	0,59672	0,02325	-1,26935	0,45268	-1,22823
i=5	0,01162	1,39784	0,55061	-0,59672	0,22492	0,69892	0,24925	1,22823
i=6	-0,01162	-1,39784	0,55061	-0,59672	0,22492	-0,69892	0,24925	-1,22823
i=7	0,01162	2,53869	1,81615	0,59672	-0,22492	1,26935	0,45268	1,22823
i=8	-0,01162	-2,53869	1,81615	0,59672	-0,22492	-1,26935	0,45268	-1,22823

A Föld képe az  $E_{Ae}$  kritérium szerinti legjobb valódi hengervetületben az 1. ábrán látható.

### III. Legjobb pólusvonalas képzetes hengervetületek ekvidisztáns paralelkörökkel

Az  $x=c(\mathbf{j}) \cdot \text{arc} \mathbf{l}$  vetületi egyenlettel leírt legegyszerűbb típusú képzetes hengervetületnél a  $c(\mathbf{j})$  függvényt  $c_1 + c_2 \cdot \text{arc}^2 \mathbf{j} + c_3 \cdot \text{arc}^4 \mathbf{j}$  alakú polinommal közelítjük:

$$x = (c_1 + c_2 \cdot \text{arc}^2 \mathbf{j} + c_3 \cdot \text{arc}^4 \mathbf{j}) \cdot \text{arc} \mathbf{l} .$$

(A polinom fokszámának növelése az  $E$  értékét elenyésző, 0.01%-nál kisebb mértékben csökkentené.) Ekkor a fokhálózat menti torzulások:

$$h = \frac{c_1 + c_2 \cdot \text{arc}^2 \mathbf{j} + c_3 \cdot \text{arc}^4 \mathbf{j}}{\cos \mathbf{j}} ;$$

$$k = \sqrt{\left(\frac{dy}{d\mathbf{j}}\right)^2 + \left[ (2 \cdot c_2 \cdot \text{arc} \mathbf{j} + 4 \cdot c_3 \cdot \text{arc}^3 \mathbf{j}) \cdot \text{arc} \mathbf{l} \right]^2} ;$$

$$\text{ctg} \mathbf{q} = \frac{(2 \cdot c_2 \cdot \text{arc} \mathbf{j} + 4 \cdot c_3 \cdot \text{arc}^3 \mathbf{j}) \cdot \text{arc} \mathbf{l}}{\frac{dy}{d\mathbf{j}}} ;$$

ahol  $\frac{dy}{d\mathbf{j}}$  értéke a közelítő  $y=y(\mathbf{j})$  polinom fokszámától függ:

- $y=\text{arc} \mathbf{j}$  esetén  $\frac{dy}{d\mathbf{j}} = 1$  ;
- $y=d \cdot \text{arc} \mathbf{j}$  esetén  $\frac{dy}{d\mathbf{j}} = d$  ;
- $y=y_1 \cdot \text{arc} \mathbf{j} + y_2 \cdot \text{arc}^3 \mathbf{j} + y_3 \cdot \text{arc}^5 \mathbf{j}$  esetén  $\frac{dy}{d\mathbf{j}} = y_1 + 3 \cdot y_2 \cdot \text{arc}^2 \mathbf{j} + 5 \cdot y_3 \cdot \text{arc}^4 \mathbf{j}$  .

Meghatároztuk az optimális vetületi paramétereket  $y=\text{arc} \mathbf{j}$  , valamint első-, harmad- és ötödfokú közelítő polinom esetében. Hasonlítsuk össze az  $y=\text{arc} \mathbf{j}$  (4. táblázat) és  $y=y_1 \cdot \text{arc} \mathbf{j} + y_2 \cdot \text{arc}^3 \mathbf{j} + y_3 \cdot \text{arc}^5 \mathbf{j}$  (5. táblázat) által szolgáltatott eredményeket az  $E$  kritériumok értékei alapján!

4. táblázat

$E$	$c_1$	$c_2$	$c_3$
$E_{AJ}=\mathbf{0,30810}$	0,63987	-0,14501	-
$E_{Ae}=\mathbf{0,72459}$	0,68075	-0,08296	-0,01733
$E_{Am}=\mathbf{0,75141}$	0,71518	-0,09915	-0,01389
$E_{AK}=\mathbf{0,24862}$	0,77798	-0,07086	-0,01880

5. táblázat

$E$	$c_1$	$c_2$	$c_3$	$y_1$	$y_2$	$y_3$
$E_{AJ}=\mathbf{0,30773}$	0,64220	-0,15205	0,00282	1,00000	-0,01977	0,00462
$E_{Ae}=\mathbf{0,68309}$	0,60451	-0,04140	-0,02866	0,71784	0,15347	-0,02927
$E_{Am}=\mathbf{0,74609}$	0,71861	-0,09752	-0,01764	0,98534	0,04594	-0,01038
$E_{AK}=\mathbf{0,24840}$	0,77900	-0,07136	-0,01950	1,00000	0,01247	-0,00238

Látható, hogy az  $E_{AJ}$  és az  $E_{AK}$  kritériumok tekintetében csak igen csekély, 0,01% körüli csökkenés érhető el az  $y$  fokszámának emelésével. Az  $E_{Am}$  valamivel nagyobb mértékben, 0,7%-kal csökkent. Következésképpen az  $E_{AJ}$  és  $E_{AK}$  szerinti legjobb, ekvidisztáns képzetes hengervetületet célszerű középmeridiánban hossztartónak tekinteni, sőt még az  $E_{Am}$  szerinti legjobb, ekvidisztáns képzetes hengervetülethez is elfogadható közelítés az  $y = \arccos j$ .

Igen jelentős mértékben: 7%-kal csökkenthető viszont  $E_{Ac}$  az ötödfokú  $y$  bevezetésével, ami a középmeridián menti hossztorzulás változó voltát mutatja. A középmeridián tehát itt nem ekvidisztáns, az osztásközök az egyenlítőől a pólusok felé haladva a  $\pm 71,86^\circ$  szélességig fokozatosan nőnek, onnan a pólusokig kissé csökkennek.

A Föld képe az  $E_{AK}$  kritérium szerinti legjobb, ekvidisztáns paralelkörű pólusvonalas képzetes hengervetületben a 2. ábrán látható.

#### IV. Területtartó pólusvonalas képzetes hengervetület előállítás a legjobb, ekvidisztáns paralelkörű képzetes hengervetületből a szélesség át számozásával

Ismeretes (ld. [12]), hogy képzetes hengervetületeknél a  $t$  területi modulus az alábbi alakban számítható:

$$t = h \cdot k \cdot \sin q = \frac{\partial x}{\partial l} \cdot \frac{1}{\cos j} \cdot \frac{dy}{dj} \cdot \frac{1}{\sin q} \cdot \sin q .$$

Tekintsünk most egy területtartó ( $t=1$ ) képzetes hengervetületet. Ekkor fennáll a

$$\frac{\partial x}{\partial l} \cdot \frac{1}{\cos j} \cdot \frac{dy}{dj} = 1 \text{ egyenlet, ahonnan } \frac{\partial x}{\partial l} = \frac{\cos j}{\frac{dy}{dj}} \text{ következik. Vagyis } \frac{\partial x}{\partial l} \text{ csak a } j$$

szélesség függvénye, tehát az  $x = x(j, l)$  vetületi egyenlet  $\lambda$ -nak lineáris függvénye. Ebből adódóan a területtartó képzetes hengervetületek paralelköröi mindig ekvidisztánsak.

Az állítás fordítva természetesen nem igaz, azaz egy ekvidisztáns paralelkörű képzetes hengervetület nem feltétlenül területtartó (ld. pl. Eckert III. és V. vetületét). Ha viszont egy ekvidisztáns paralelkörű képzetes hengervetület az egész Földfelületet egy vele megegyező területű síkidomra képezi le, akkor a szélességi körök át számozásával („módosított földrajzi szélesség” bevezetésével) a vetület mindig területtartóvá alakítható. Ez a transzformáció a meridiánokat (és ezzel a kontúrvonalat) nem változtatja meg, viszont megváltozhat a paralelköröknek az egyenlítőől vett távolsága.

Tegyük fel, hogy egy középmeridiánban hossztartó, paralelkörökben ekvidisztáns képzetes hengervetület  $y = \arccos j$  és  $x = x(j, l)$  egyenleteit egy alkalmasan megválasztott  $d$  arányossági tényezővel besorozva, az egész Föld képre vonatkozó területegyenlőség már fennáll. Alkalmazzuk erre a vetületre a  $y(j)$  szélesség-át számozást ( $d \arccos j$  és  $d x(j, l)$ ) úgy, hogy minden – az ellipszis és a  $\varphi$  szélességi kör által határolt – gömböv  $2 \pi \sin j$



felszíne legyen egyenlő a megfelelő térképi idom területével (ld. 3. ábra). Képletben ez az alábbiakat jelenti:

$$2 \cdot \mathbf{p} \cdot \sin \mathbf{j} = 2 \cdot d^2 \cdot \int_0^{\text{arcy}} x(y, \mathbf{I} = 180^\circ) dy = 2 \cdot d^2 \cdot \int_0^{\text{arcy}} \mathbf{p} \cdot \frac{\partial x}{\partial \mathbf{I}}(y) dy = 2 \cdot d^2 \cdot \mathbf{p} \cdot \int_0^{\text{arcy}} \frac{\partial x}{\partial \mathbf{I}}(y) dy = G(\mathbf{y})$$

(Megjegyzendő, hogy ebből a  $2 \cdot \mathbf{p} \cdot \sin \mathbf{j} = G(\mathbf{y})$  alakú egyenlet által meghatározott  $\mathbf{y}(\mathbf{j})$  implicit szélesség-átszámozási függvényből a  $\mathbf{y}$  nem mindig fejezhető ki.) Az átszámozott  $d \cdot \text{arcy}$  és  $d \cdot x(\mathbf{y}, \mathbf{I})$  egyenletekkel meghatározott vetület már területtartó, mert (felhasználva az implicit függvény deriválására vonatkozó formulát):

$$\begin{aligned} t &= \frac{\partial x}{\partial \mathbf{I}} \cdot \frac{d}{\cos \mathbf{j}} \cdot \frac{dy}{d\mathbf{j}} \cdot \frac{1}{\sin \mathbf{j}} \cdot \sin \mathbf{j} = d \cdot \frac{\partial x}{\partial \mathbf{I}} \cdot \frac{1}{\cos \mathbf{j}} \cdot \frac{dy}{d\mathbf{j}} \cdot \frac{d\mathbf{y}}{d\mathbf{j}} = d^2 \cdot \frac{\partial x}{\partial \mathbf{I}} \cdot \frac{1}{\cos \mathbf{j}} \cdot \frac{2 \cdot \mathbf{p} \cdot \cos \mathbf{j}}{\frac{dG(\mathbf{y})}{d\mathbf{y}}} = \\ &= d^2 \cdot \frac{\partial x}{\partial \mathbf{I}} \cdot \frac{1}{\cos \mathbf{j}} \cdot \frac{2 \cdot \mathbf{p} \cdot \cos \mathbf{j}}{2 \cdot d^2 \cdot \mathbf{p} \cdot \frac{\partial x}{\partial \mathbf{I}}} = 1 \end{aligned}$$

(Ha a paralellkörökben ekvidisztáns képzetes hengervetületben a középmeridián nem hossztartó, akkor először vezessük be a  $\mathbf{z}=\mathbf{z}(\mathbf{j})$  módosított szélességet a

$$\mathbf{x} = 90^\circ \cdot \frac{y(\mathbf{j})}{y(90^\circ)}$$

képlet segítségével. Az átszámozott  $y=y(\mathbf{z})$  a  $\mathbf{z}$ -ra nézve hossztartó; most már alkalmazhatunk egy újabb,  $\mathbf{y}(\mathbf{z})$  átszámozást  $y=y(\mathbf{z})$ -ra a fenti  $\mathbf{y}(\mathbf{j})$  átszámozás mintájára. A két egymás utáni átszámozás és az esetleges d-szeres hasonlósági transzformáció együttes alkalmazásával tehát területtartó vetülethez jutunk.)

A fenti gondolatmenetet követve készítsünk a szélességi körök átszámozásával területtartó képzetes hengervetületet pl. az  $E_{Am}$  kritérium szerinti legjobb képzetes hengervetületből, melynek paralellkörei ekvidisztánsak, középmeridiánját pedig hossztartónak tekintjük. Először is határozzuk meg a hasonlósági transzformáció  $d$  konstansának értékét, melynek négyzete a gömb felszínének és a teljes Föld képét megadó síkidom területének hányadosa:

$$\begin{aligned} d^2 &= \frac{4 \cdot \mathbf{p}}{2 \cdot \int_{-90^\circ}^{90^\circ} x(y, \mathbf{I} = 180^\circ) dy} = \frac{4 \cdot \mathbf{p}}{2 \cdot \int_{-90^\circ}^{90^\circ} \mathbf{p} \cdot \frac{\partial x}{\partial \mathbf{I}}(y) dy} = \frac{4 \cdot \mathbf{p}}{2 \cdot \mathbf{p} \cdot \int_{-90^\circ}^{90^\circ} (c_1 + c_2 \cdot y^2 + c_3 \cdot y^4) dy} = \\ &= \frac{2}{\left[ c_1 \cdot y + \frac{c_2}{3} \cdot y^3 + \frac{c_3}{5} \cdot y^5 \right]_{-90^\circ}^{90^\circ}} = \frac{1}{\left( 0,71518 \cdot \frac{\mathbf{p}}{2} - \frac{0,09915}{3} \cdot \left( \frac{\mathbf{p}}{2} \right)^3 - \frac{0,01389}{5} \cdot \left( \frac{\mathbf{p}}{2} \right)^5 \right)} = 1,01606 \end{aligned}$$

A vetületi egyenletek:  $y=0,955836 \cdot \text{arcy}$ ;  
 $x=0,955836 \cdot (0,77798 - 0,07086 \cdot \text{arc}^2 \mathbf{y} - 0,01880 \cdot \text{arc}^4 \mathbf{y}) \cdot \text{arc} \mathbf{I}$ .

A  $y(j)$  szélesség-átszámozási függvényt meghatározó egyenletet az egyenlítő által határolt gömböveknek ugyanakkora területű síkidomra való leképezése adja:

$$2 \cdot p \cdot \sin j = 2 \cdot d^2 \cdot p \cdot \int_0^{\text{arc}y} \frac{\partial x}{\partial l}(y) dy = 2 \cdot p \cdot d^2 \cdot \left( c_1 \cdot y + \frac{c_2}{3} \cdot y^3 + \frac{c_3}{5} \cdot y^5 \right),$$

vagyis  $\sin j = d^2 \cdot (0,71518 \cdot y - 0,03305 \cdot y^3 - 0,002778 \cdot y^5)$ .

A 4. ábrán az  $E_{AK}$  kritérium szerinti legjobb, ekvidisztáns parallelkörű pólusvonalas képzetes hengervetületből származtatott területtartó vetület látható.

### V. Pólusvonalas képzetes hengervetületek ugyanolyan arányban felosztott parallelkörökkel

Az  $x=c(j) \cdot f(l)$  vetületi egyenlettel leírt képzetes hengervetületnél a  $c(j)$  függvényt  $c_1+c_2 \cdot \text{arc}^2 j+c_3 \cdot \text{arc}^4 j$  alakú polinommal, az  $f(l)$  függvényt a  $\text{arc} l+f_1 \cdot \text{arc}^3 l$  polinommal közelítjük:

$$x = (c_1 + c_2 \cdot \text{arc}^2 j + c_3 \cdot \text{arc}^4 j) \cdot (\text{arc} l + f_1 \cdot \text{arc}^3 l).$$

Ebben a vetületosztályban az ekvidisztáns vetületekhez képest az  $E$  kritériumok értéke csak szerény mértékben csökkenthető tovább. Általánosan elmondható, hogy itt a meridiánban hossztartó közelítést már nem tekintjük elég pontosnak, az  $y$  vetületi egyenletet harmad- vagy ötödfokú polinommal közelítjük:  $y=y_1 \cdot \text{arc} j+y_2 \cdot \text{arc}^3 j+(y_3 \cdot \text{arc}^5 j)$ . A fokhálózat menti torzulások:

$$h = \frac{c_1 + c_2 \cdot \text{arc}^2 j + c_3 \cdot \text{arc}^4 j}{\cos j} \cdot (1 + 3 \cdot f_1 \cdot \text{arc}^2 l);$$

$$k = \sqrt{(y_1 + 3 \cdot y_2 \cdot \text{arc}^2 j + 5 \cdot y_3 \cdot \text{arc}^4 j)^2 + [(2 \cdot c_2 \cdot \text{arc} j + 4 \cdot c_3 \cdot \text{arc}^3 j) \cdot (\text{arc} l + f_1 \cdot \text{arc}^3 l)]^2};$$

$$\text{ctg} q = \frac{(2 \cdot c_2 \cdot \text{arc} j + 4 \cdot c_3 \cdot \text{arc}^3 j) \cdot (\text{arc} l + f_1 \cdot \text{arc}^3 l)}{y_1 + 3 \cdot y_2 \cdot \text{arc}^2 j + 5 \cdot y_3 \cdot \text{arc}^4 j}.$$

Az egyes kritériumok szerinti legjobb képzetes hengervetületek paramétereit az alábbi táblázat tartalmazza:

6. táblázat

$E$	$c_1$	$c_2$	$c_3$	$f_1$	$y_1$	$y_2$	$y_3$
$E_{AJ}=0,30742$	0,62607	-0,14802	0,00228	0,00275	0,99463	-0,00760	-
$E_{Ac}=0,68041$	0,58556	-0,04530	-0,02719	0,00436	0,72310	0,15376	-0,02949
$E_{Am}=0,74199$	0,69420	-0,10078	-0,01602	0,00423	0,98476	0,04931	-0,01126
$E_{AK}=0,24791$	0,76042	-0,07120	-0,02003	0,00265	1,00182	0,00686	-

A parallelkörök mentén az osztásközök a középmeridiántól távolodva kissé növekednek, a határoló meridiánál mintegy 13–14%-kal nagyobbak, mint a középmeridiánál. Ez ellentétben van a Baranyi IV. vetületénél tapasztalható osztásköz-csökkenéssel.

Az  $E_{AJ}$  kritérium szerinti legjobb pólusvonalas képzetes hengervetület, ugyanolyan arányban felosztott parallelkörökkel az 5. ábrán látható.

## VI. Legjobb pólusvonalas képzetes hengervetületek

A legjobb képzetes hengervetületeknél megengedjük a parallelkörök tetszőleges arányban való felosztását. Ezek vetületi egyenletét  $\mathbf{j}$ -ben páros,  $\mathbf{l}$ -ban páratlan kitevős polinommal közelítjük:

$$x = f_{11} \mathbf{l} + f_{12} \mathbf{l}^3 + f_{21} \mathbf{j}^2 \mathbf{l} + f_{22} \mathbf{j}^2 \mathbf{l}^3.$$

Ekkor

$$h = \frac{f_{11} + 3 \cdot f_{12} \cdot \text{arc}^2 \mathbf{l} + f_{21} \cdot \text{arc}^2 \mathbf{j} + 3 \cdot f_{22} \cdot \text{arc}^2 \mathbf{j} \cdot \text{arc}^2 \mathbf{l}}{\cos \mathbf{j}};$$

$$k = \sqrt{\left(\frac{dy}{dj}\right)^2 + \left[2 \cdot f_{21} \cdot \text{arc} \mathbf{j} \cdot \text{arc} \mathbf{l} + 2 \cdot f_{22} \cdot \text{arc} \mathbf{j} \cdot \text{arc}^3 \mathbf{l}\right]^2};$$

$$\text{ctg } \mathbf{q} = \frac{2 \cdot f_{21} \cdot \text{arc} \mathbf{j} \cdot \text{arc} \mathbf{l} + 2 \cdot f_{22} \cdot \text{arc} \mathbf{j} \cdot \text{arc}^3 \mathbf{l}}{\frac{dy}{dj}}.$$

Kiszámítottuk ebben a vetületosztályban is a legkisebb átlagos hibát eredményező vetületi együtthatókat  $y = \text{arc} \mathbf{j}$ , majd első-, harmad- és ötödfokú közelítő polinom választása esetén. Hasonlítsuk össze itt is az  $y = \text{arc} \mathbf{j}$  (7. táblázat) és  $y = y_1 \cdot \text{arc} \mathbf{j} + y_2 \cdot \text{arc}^3 \mathbf{j} + y_3 \cdot \text{arc}^5 \mathbf{j}$  (8. táblázat) által szolgáltatott eredményeket az  $E$  kritériumok értékei alapján.

7. táblázat

$E$	$f_{11}$	$f_{12}$	$f_{21}$	$f_{22}$
$E_{AJ} = \mathbf{0,29278}$	0,56028	0,01144	-0,06888	-0,01042
$E_{Ac} = \mathbf{0,69260}$	0,61795	0,00990	-0,05382	-0,00904
$E_{Am} = \mathbf{0,72007}$	0,66028	0,00839	-0,06557	-0,00845
$E_{AK} = \mathbf{0,23601}$	0,72895	0,00762	-0,00385	-0,01316

8. táblázat

$E$	$f_{11}$	$f_{12}$	$f_{21}$	$f_{22}$	$y_1$	$y_2$	$y_3$
$E_{AJ} = \mathbf{0,29252}$	0,56156	0,01137	-0,06986	-0,01040	1,00023	-0,01300	0,00203
$E_{Ac} = \mathbf{0,66236}$	0,56176	0,01035	-0,04085	-0,00890	0,76974	0,13388	-0,02756
$E_{Am} = \mathbf{0,71628}$	0,66252	0,00869	-0,07059	-0,00844	0,98863	0,04403	-0,01108
$E_{AK} = \mathbf{0,23584}$	0,72912	0,00766	-0,00469	-0,01319	0,99985	0,01052	-0,00196

Az  $E$  értékek az V. vetületosztályhoz képest több %-kal tovább csökkentek. Az  $E_{AJ}$  és  $E_{AK}$  kritérium-értékek az  $y(\mathbf{j})$  fokszámának növelésével érdemben nem javultak, viszont

$E_{AJ}$  és  $E_{AK}$  8. táblázatban szereplő értékei lényegesen kedvezőbbek, mint a 7. táblázatbeliek. Ezért – hasonlóan a III. osztály vetületeihez – az  $E_{AJ}$  és  $E_{AK}$  szerinti legjobb képzetes hengervetületet meridiánban hossztartó vetületnek tekintjük.

A 6. ábra mutatja a Föld képét az  $E_{Am}$  kritérium szerinti, a 7. ábra az  $E_{AK}$  kritérium szerinti legjobb pólusvonalas képzetes hengervetületben. Az egyenlítő mentén az osztásközök a középmeridiántól távolodva kissé növekszenek, a pólusvonalnál viszont erősen csökkennek. Hasonló osztásköz-struktúra mutatkozik a többi kritérium szerinti legjobb pólusvonalas képzetes hengervetületeknél is.

### **Következtetések**

A négy különböző átlagos teljes torzultsági kritérium ( $E_{AJ}$ ,  $E_{Ae}$ ,  $E_{Am}$  és  $E_{AK}$ ) segítségével folytatott vizsgálat eredményei lehetőséget adnak általános következtetések levonására, de a kapott térképek kritériumonként lényeges különbségeket mutatnak. A korábbi vizsgálatok (ld. [4], [5]) eredményeivel egybecsengően megállapítható, hogy leginkább az  $E_{Am}$  és  $E_{AK}$  kritérium szerinti legjobb vetületek állnak összhangban a szemlélettel, az esztétikai érzékkel és a hagyományokkal, míg ez legkevésbé az  $E_{AJ}$  kritérium szerinti legjobb vetületekre mondható el. Ez is alátámasztja azt a megállapítást, hogy az utóbbi kritérium nagy kiterjedésű területek ábrázolásának torzulási vizsgálatára nem igazán alkalmas.

Az eredmények általánosságban a következőkben foglalhatók össze:

A legjobb pólusvonalas képzetes hengervetületek átlagos teljes torzultsága lényegesen kisebb, mint a valódi hengervetületeké.

A legjobb pólusvonalas képzetes hengervetületek paralelkörei a fentiekben leírt módon változó felosztásúak. Az  $x$  vetületi egyenlethez négy együtthatót választva az optimális vetületeknek kielégítően pontos közelítést kapjuk.

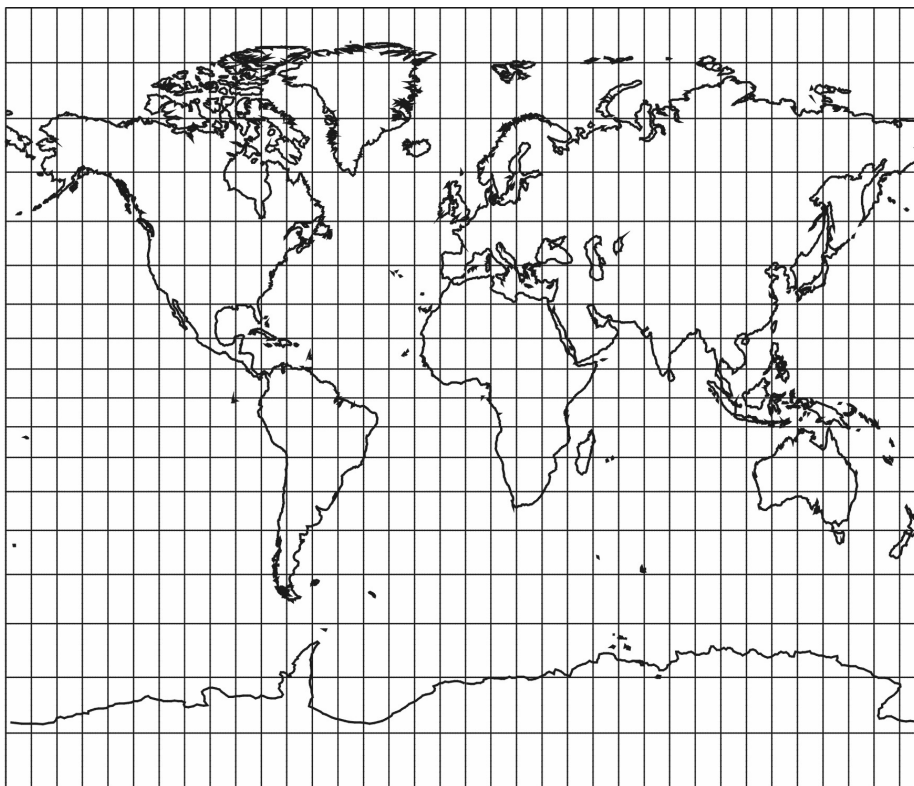
A legjobb pólusvonalas képzetes hengervetületekre az  $E_{AJ}$  és  $E_{AK}$  kritérium esetében a meridiánban hossztartó ( $y=arcj$ ) változat már elegendően pontos közelítést ad, viszont elsősorban az  $E_{Ae}$  kritériumnál (és kisebb mértékben az  $E_{Am}$  kritériumnál) az  $y$  fokszámának növelésével az átlagos torzultság még számottevően csökkenthető.

A legjobb pólusvonalas, ekvidisztáns paralelkörű képzetes hengervetületekből a szélességét átszámozásával előnyös torzulású területtartó vetületeket konstruálhatunk.

Mind az ekvidisztáns paralelkörű, mind a változóan felosztott paralelkörű legjobb képzetes hengervetületeknek elsősorban az  $E_{AK}$ , de az  $E_{Am}$  (és esetleg az  $E_{Ae}$ ) kritérium szerinti változatai is torzulási szempontból kedvezőbbek, mint a hagyományos képzetes hengervetületek, ezért a teljes Föld ábrázolására hangsúlyozottan javasolhatók.

## Irodalom

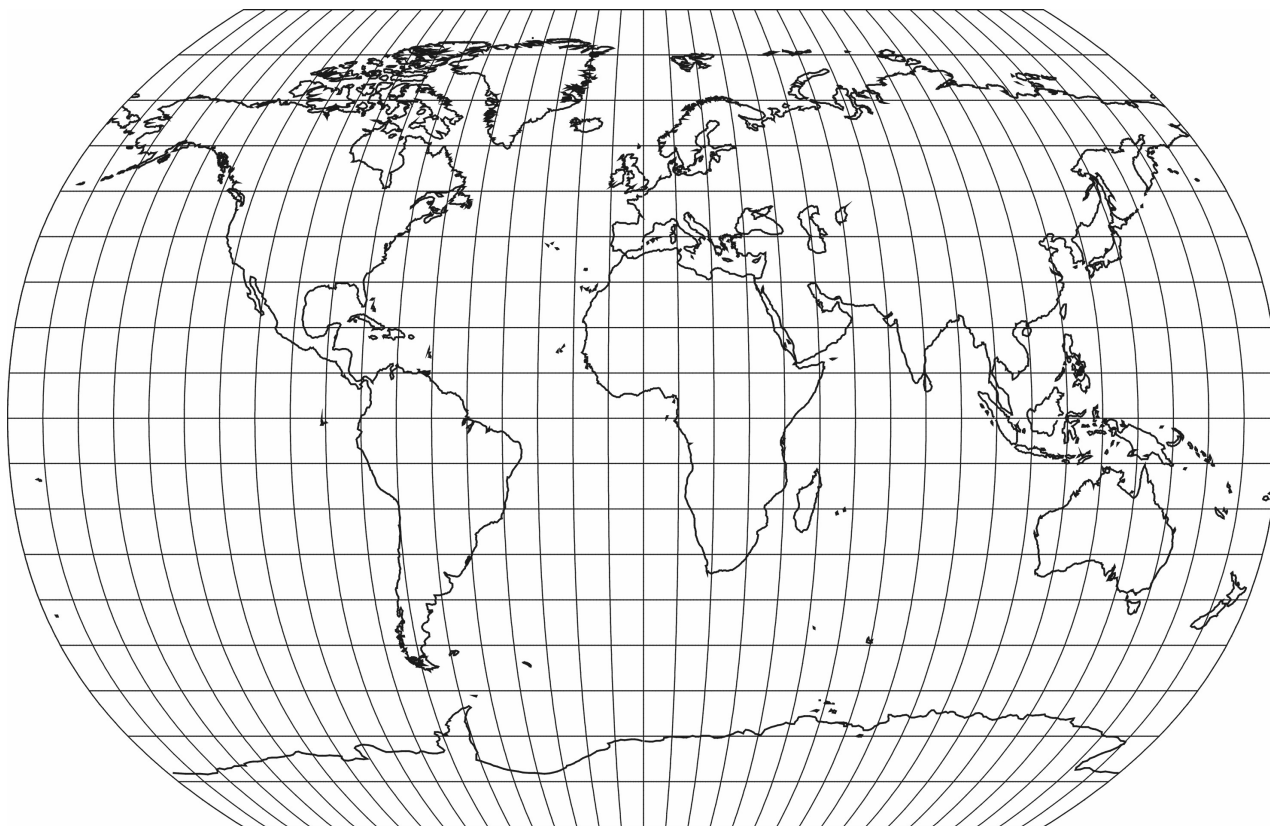
- [1] Airy, G. B.: *Explanation of a Projection by Balance of Errors for Maps applying to a very large extent of the Earth's Surface; and Comparison of this projection with other projections*, In: Philosophical Magazine and Journal of Science. S. 4. Vol. 22. No. 149. 1861. 409–421. o.
- [2] Baranyi J. – Györfly J.: *A Föld újszerű ábrázolása a mai magyar atlaszokban*, In: Földrajzi Közlemények 3–4/1990. 109–117. o. Budapest.
- [3] Bugayevskiy, L. M. – Snyder, J. P.: *Map Projections – A Reference Manual*, Taylor & Francis, London 1995.
- [4] Fran ula, N.: *Die vorteilhaftesten Abbildungen in der Atlaskartographie*, Doktori disszertáció, Bonn 1971.
- [5] Györfly J.: *Anmerkungen zur Frage der besten echten Zylinderabbildungen*, In: Kartographische Nachrichten 4/1990. Kirschbaum Verlag, Bonn.
- [6] James, H. – Clarke, R. E.: *On Projections for Maps applying to a very large extent of the Earth's Surface*, In: Philosophical Magazine and Journal of Science. S. 4. Vol. 23. No. 154. 1862. 306–312.o.
- [7] 7"&D"6F846.ñ%.ñ%.:ñ32SD">>Z, ñHDJ\*Zñ' EI %; K, ; @F8&"ñ1958.
- [8] Korn, G. A. – Korn, T. M.: *Matematikai kézikönyv műszakiaknak*, Műszaki Könyvkiadó, Budapest 1975.
- [9] Kósa A.: *Variációs számítás*, Tankönyvkiadó, Budapest 1970.
- [10] ; , V, Db8@& ' . ! : G, @D, H4R, F84, @F>@&Z <"H <"H4R, F8@6 8"DH@D"L44. =, \*D", ; @F8&" 1968.
- [11] Press, W. H. – Teukolsky, S. A. – Vetterling, W. T. – Flannery, B. P.: *Numerical Recipes*, Cambridge Univ. Press 1986.
- [12] Stegena L.: *Vetőlektan*, Tankönyvkiadó, Budapest 1988.



M=125 millió

1. ábra: A Föld az Airy eredeti kritériuma szerinti legjobb,  $\pm 62,60^\circ$ -on hossztartó valódi hengervetületben

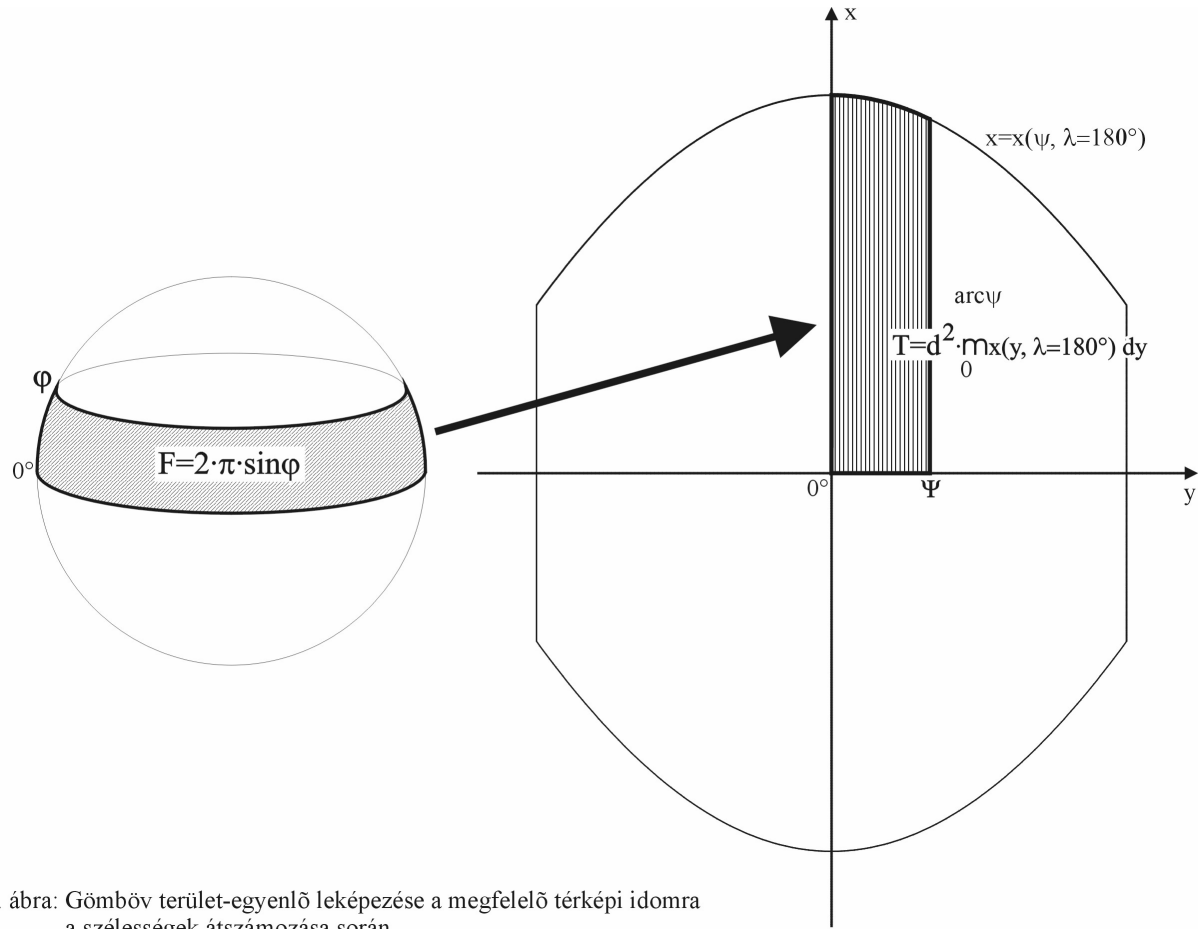
$$x = \cos(\pm 62,60^\circ) \cdot \text{arc}\lambda \quad y = 0,51700 \cdot \text{arc}\varphi + 0,17995 \cdot \text{arc}^3\varphi - 0,02942 \cdot \text{arc}^5\varphi$$



M=125 millió

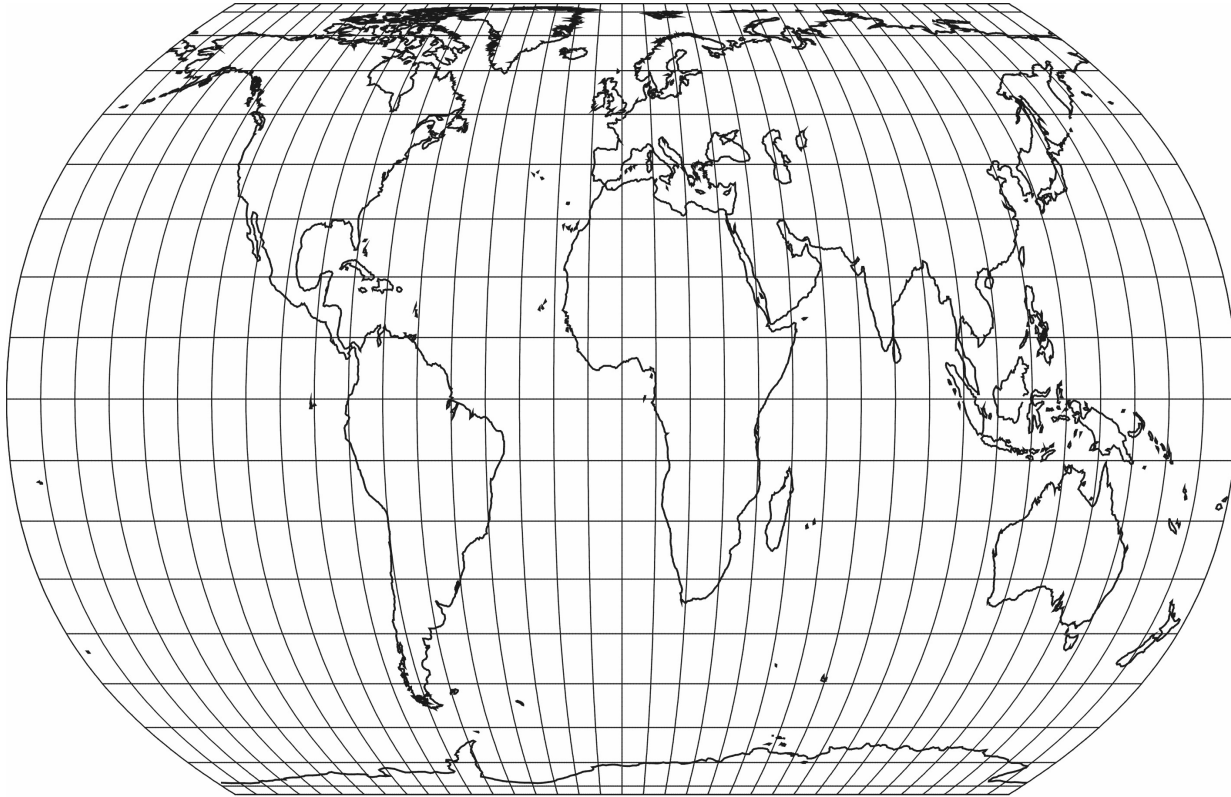
2. ábra: A Föld az Airy-Kavrajcskij kritérium szerinti legjobb, ekvidisztáns parallalkörű pólusvonalas képzetes hengervetületben

$$x = (0,77798 - 0,07086 \cdot \text{arc}^2 \varphi - 0,01880 \cdot \text{arc}^4 \varphi) \cdot \text{arc} \lambda \quad y = \text{arc} \varphi$$



3. ábra: Gömbön terület-egyenlő leképezése a megfelelő térképi idomra a szélességek átszámozása során

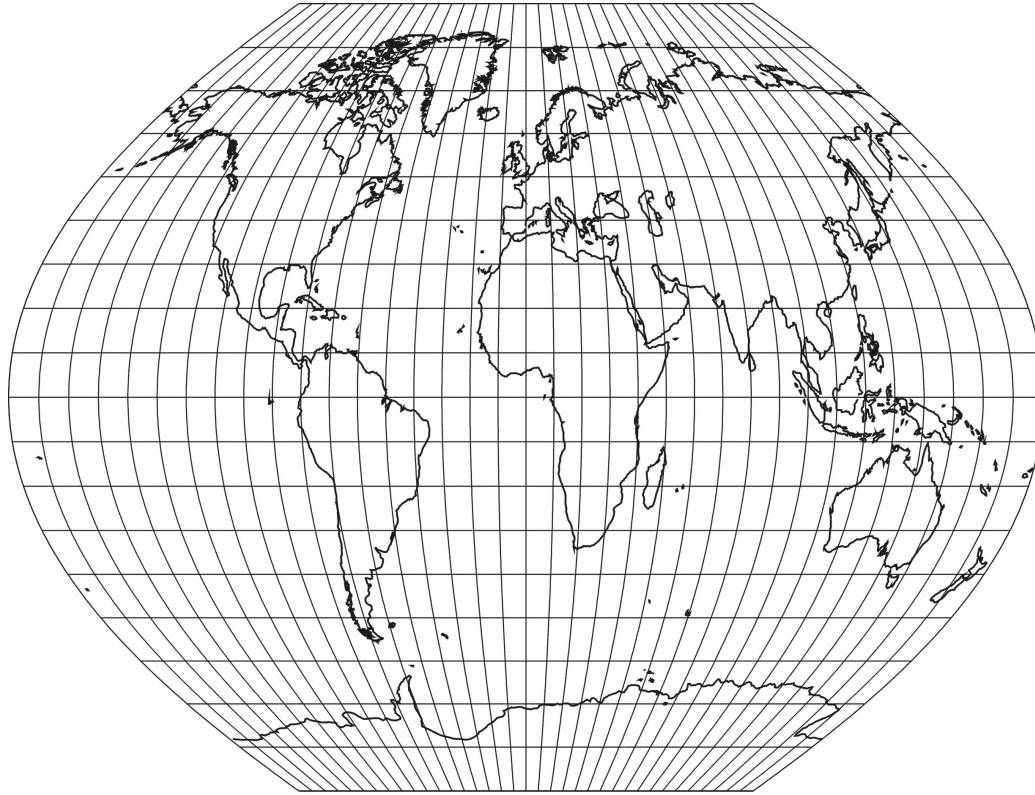




M=125 millió

4. ábra: A Föld területtartó képzetes hengervetületben, amely az Airy-Kavrajzkij kritérium szerinti legjobb, ekvidisztáns paralellkörű képzetes hengervetületből származik a szélesség átszámolásával

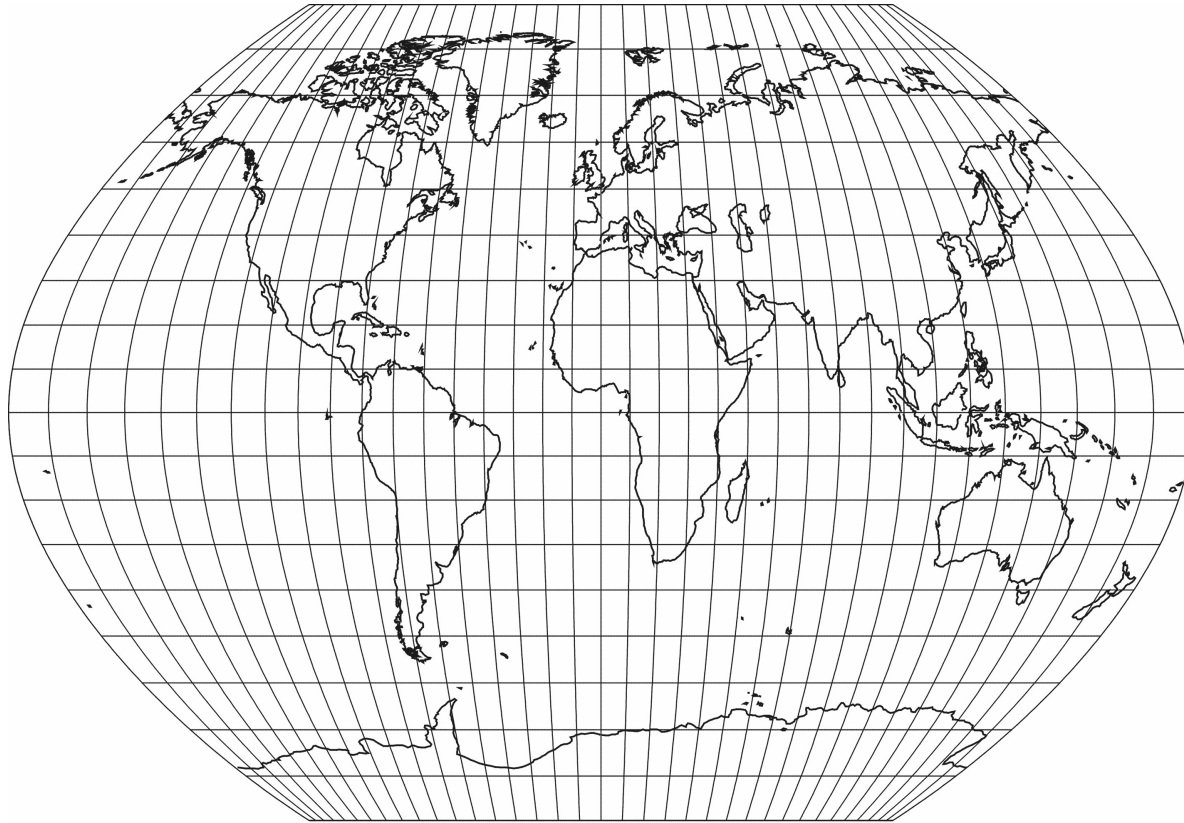
$$x = 0,955836 \cdot (0,77798 - 0,07086 \cdot \text{arc}^2 \psi - 0,01880 \cdot \text{arc}^4 \psi) \cdot \text{arc} \lambda \quad y = 0,955836 \cdot \text{arc} \psi$$



M=125 millió

5. ábra: A Föld az Airy-James-Clarke kritérium szerinti legjobb, pólusvonalas képzetes hengervetületben, melynek parallelköreit a meridiánok ugyanolyan arányban osztják fel

$$x = (0,62607 - 0,14802 \cdot \text{arc}^2 \varphi - 0,00228 \cdot \text{arc}^4 \varphi) \cdot (\text{arc} \lambda + 0,00275 \cdot \text{arc}^3 \lambda) \quad y = 0,99463 \cdot \text{arc} \varphi - 0,00760 \cdot \text{arc}^3 \varphi$$

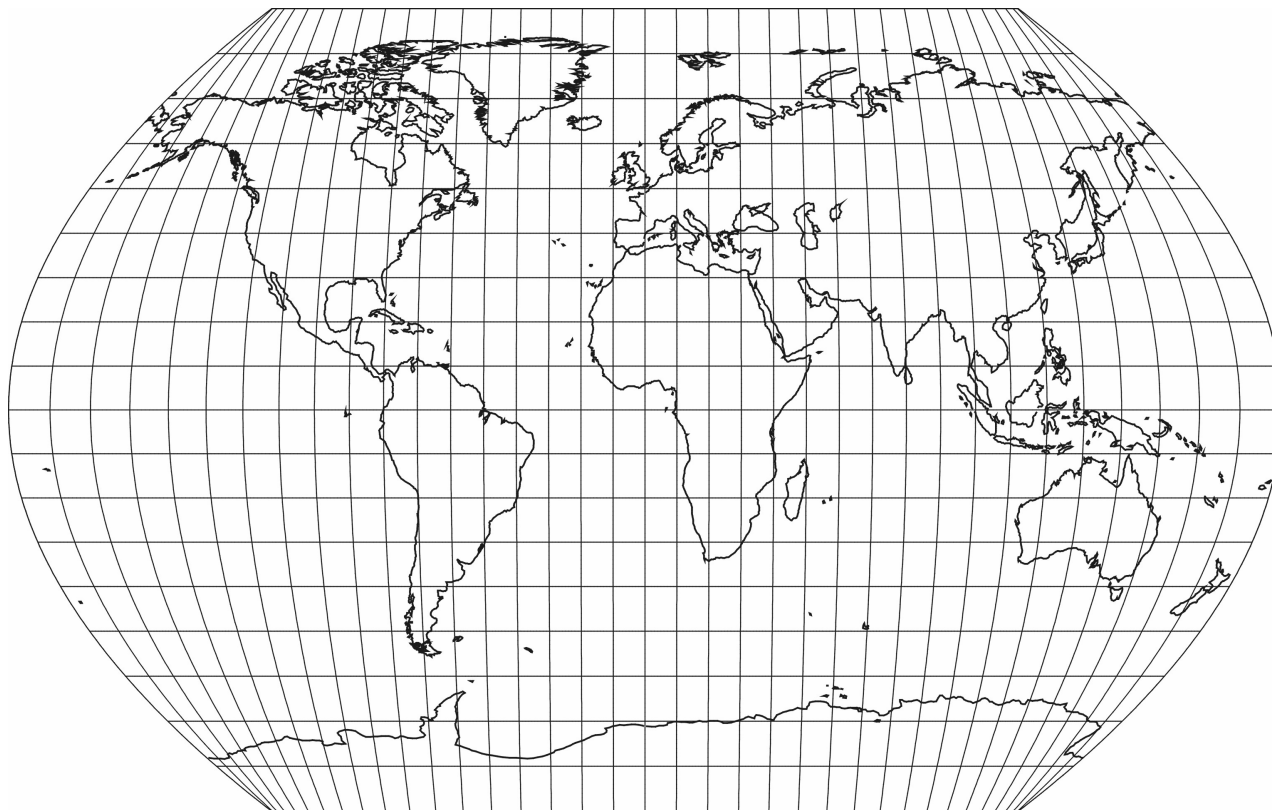


M=125 millió

6. ábra: A Föld az Airy módosított kritériuma szerinti legjobb, pólusvonalas képzetes hengervetületben

$$x = 0,66252 \cdot \text{arc}\lambda + 0,00869 \cdot \text{arc}^3\lambda - 0,07059 \cdot \text{arc}^2\varphi \cdot \text{arc}\lambda - 0,00844 \cdot \text{arc}^2\varphi \cdot \text{arc}^3\lambda$$

$$y = 0,98863 \cdot \text{arc}\varphi + 0,04403 \cdot \text{arc}^3\varphi - 0,01108 \cdot \text{arc}^5\varphi$$



M=125 millió

7. ábra: A Föld az Airy-Kavrajzkij féle kritérium szerinti legjobb, pólusvonalas képzetes hengervetületben

$$x = 0,72912 \cdot \text{arc}\lambda + 0,00766 \cdot \text{arc}^3\lambda - 0,00469 \cdot \text{arc}^2\varphi \cdot \text{arc}\lambda - 0,01319 \cdot \text{arc}^2\varphi \cdot \text{arc}^3\lambda$$

$$y = 0,99985 \cdot \text{arc}\varphi + 0,01052 \cdot \text{arc}^3\varphi - 0,00196 \cdot \text{arc}^5\varphi$$